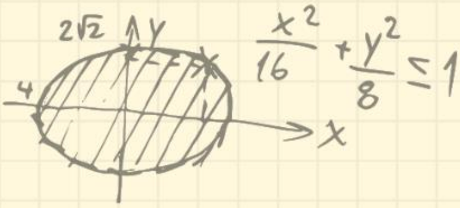
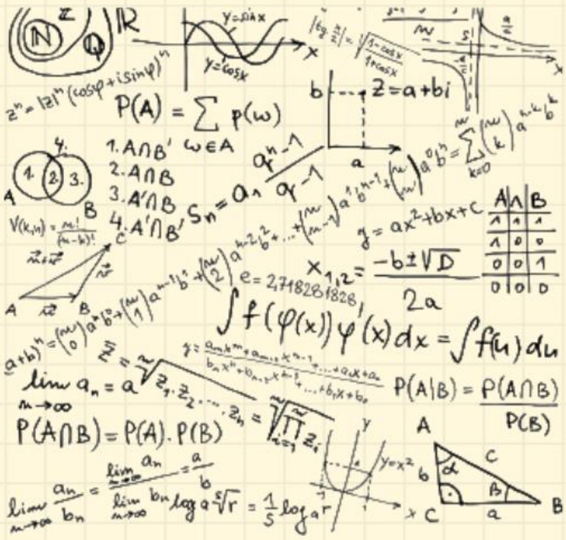
ПРЕЗИДЕНТСКАЯ
АКАДЕМИЯ
РАНХИГС АЛТАЙ

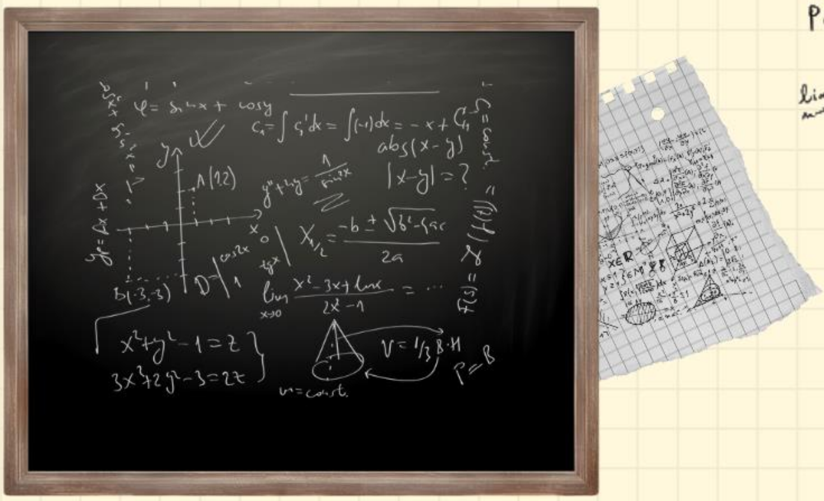


ЛЕКЦИИ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ГУМАНИТАРНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

ЧАСТЬ 2

АБАКУМОВА Н.А., СВЕРДЛОВА Е.Г.





Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

АЛТАЙСКИЙ ФИЛИАЛ

Абакумова Н.А., Свердлова Е.Г.

Лекции по высшей математике для студентов гуманитарных направлений (Часть 2)

Учебное пособие

Барнаул, 2026

Об издании – 1, 2

УДК 519.6
ББК 22.1

Авторы:

Абакумова Наталья Александровна – доцент кафедры гуманитарных и естественнонаучных дисциплин Алтайского филиала Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, к.соц.н.

Свердлова Елена Геннадьевна – доцент кафедры гуманитарных и естественнонаучных дисциплин Алтайского филиала Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, к.ф.-м.н.

Рецензенты:

Половникова Е.С. – доцент кафедры «Информационные системы в экономике» Алтайского государственного технического университета, к.ф.-м.н.

Ломских Н.В. – доцент кафедры «Высшая математика» Алтайского государственного технического университета. к.ф.-м.н.

Абакумова Н.А., Свердлова Е.Г. Лекции по высшей математике для студентов гуманитарных направлений (Часть 2): учебное пособие / Н.А. Абакумова, Е.Г. Свердлова – Барнаул: Алтайский филиал РАНХиГС, 2026. – 1 CD-R (2,00 Мб). – Загл. с титул. экрана. – Текст: электронный.

Систем. требования : Intel Pentium 1,6 GHz и более ; 512 Мб (RAM) ; Microsoft Windows 7 и выше; Adobe Reader.

Электронное учебное пособие

Учебное пособие представляет собой вторую часть курса лекций по дисциплине «Высшая математика» для студентов 1-2 курсов, обучающихся по направлениям «Государственное и муниципальное управление», «Экономика», квалификация бакалавр. В пособии представлен основной теоретический материал по трем темам дисциплины: «Функции многих переменных», «Дифференциальные уравнения», «Ряды»; по каждой теме раздела разобраны типовые задачи, приведены задания для самостоятельного решения.

Учебное пособие может быть использовано при подготовке к экзамену по дисциплине, при выполнении контрольных и самостоятельных работ.

Рекомендовано к печати кафедрой «Гуманитарных и естественнонаучных дисциплин» Алтайского филиала РАНХиГС (протокол № 10 от 22.05.2025 г.).

ISBN 978-5-6054400-2-4

Тема 1. Функции нескольких переменных

§1. Понятие функции нескольких переменных

При решении практических задач, в том числе и экономических, часто встречается многофакторная зависимость. В этой ситуации значения рассматриваемой величины (функции) зависят не от одной, а от нескольких других величин (аргументов).

Определение. Пусть имеется n переменных величин, и каждому набору их значений $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ из некоторого множества D соответствует одно вполне определённое значение переменной z, тогда говорят, что на множестве D задана ***функция нескольких переменных*** –
$z = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$.

Переменные $x_1; x_2; \ldots; x_n$ называются ***независимыми переменными*** или ***аргументами***, z – ***зависимая переменная*** или ***функция***, а символ f означает закон соответствия. Множество D называется ***областью определения функции***.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x; y)$.

Множество $D = \{(x; y)\}$ называется ***областью определения функции двух переменных*** (это есть некоторое множество точек плоскости); а множество $Z = \{f(x; y)\}$ – ***множество значений функции***.

Геометрическим изображением функции $z = f(x; y)$ в прямоугольной системе координат является некоторая поверхность.

Пример. Опишите и постройте область определения функции $z = \ln(x^2 + y)$.

Решение.

Функция определена в области, которая задается неравенством $x^2 + y > 0$, или $y > -x^2$.

График параболы $y = -x^2$ делит плоскость xOy на две части – внутреннюю и внешнюю по отношению к параболе.

Если выбрать произвольную точку из той части плоскости, которая расположена выше построенной параболы, то ее координаты удовлетворяют неравенству $y > -x^2$.

Следовательно, область определения заданной функции – множество точек плоскости, расположенных выше параболы $y = -x^2$; при этом точки параболы в область определения не входят (рис. 1).

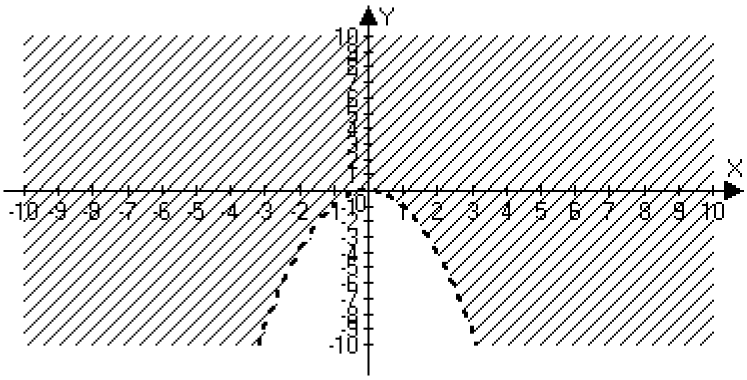


Рис.1

Пример. Постройте график функции $z = x^2 + y^2$.

Решение.

График функции $z = x^2 + y^2$ есть некоторая поверхность, все точки которой расположены не ниже точек плоскости xOy, т.к. $z \geq 0$.

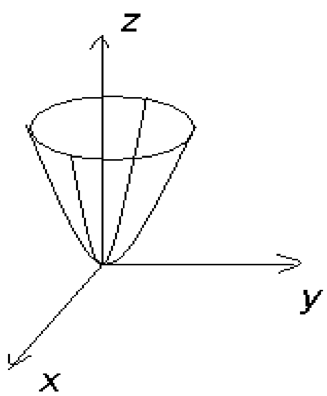
Для более четкого представления о форме поверхности рассмотрим сечение поверхности некоторыми плоскостями. Определим линию пересечения исследуемой поверхности, плоскостью $z = 0$ для чего решим систему уравнений $\begin{cases} z = 0 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$.

Решением системы является точка O (0;0;0), значит исследуемая поверхность проходит через начало координат.

Определим линию пересечения поверхности и плоскости $x = 0$, для чего рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} x = 0 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$. Очевидно, что линией пересечения является парабола $z = y^2$, симметричная относительно оси Oz с вершиной в начале координат, с ветвями направленными вверх.

Рассуждая аналогичным образом, получим, что координатная плоскость xOz пересекает искомую поверхность по параболе $z = x^2$.

Рассмотрим сечение поверхности плоскостью $z = h \quad (h > 0)$. Из системы уравнений $\begin{cases} z = h \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$ получаем, что линией пересечения исследуемой поверхности и указанной плоскости является окружность $x^2 + y^2 = h$. Исследуемая поверхность изображена на рисунке.



§2. Частные производные функции двух переменных

Определение. ***Частной производной от функции*** **z = *f* (*x*; *y*)** ***по независимой переменной x*** называется конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x'(x; y),$$

вычисленный при постоянном значении y.

Определение. ***Частной производной от функции*** $\mathbf{z = f(x; y)}$ ***по независимой переменной y*** называется конечный предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y+\Delta y) - f(x; y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f_y'(x; y),$$

вычисленный при постоянном значении x.

Для вычисления частных производных можно применять правила дифференцирования функции одной переменной.

Частные производные от частных производных первого порядка называются ***частными производными второго порядка*** и т.д.

Частные производные второго порядка для функции двух переменных обозначаются $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x; y)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x; y)$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x; y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x; y).$$

Последние две частные производные называются ***смешанными производными***.

Если частные производные первого порядка непрерывны, то значение смешанной производной не зависит от порядка дифференцирования, т.е. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Это положение распространяется и на частные производные более высокого порядка.

Пример. Определите частные производные первого порядка для функции $z = x^2 y^3 + \sin x - e^y$.

Решение.

Считая y постоянной, определим частную производную по переменной x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 y^3 + \sin x - e^y \right)_x' = 2xy^3 + \cos x - 0 = 2xy^3 + \cos x.$$

Считая x постоянной, определим частную производную по переменной y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2y^3+\sin x-e^y\right)'_y=x^2 3y^2+0-e^y=3x^2y^2-e^y.$$

Пример. Вычислите частные производные второго порядка функции $z=x^3+x^2y+y^3$.

Решение.

Вычислим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^3+x^2y+y^3\right)'_x=3x^2+2xy; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^3+x^2y+y^3\right)'_y=x^2+3y^2.$$

Определим теперь частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(3x^2+2xy\right)'_x=6x+2y; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(x^2+3y^2\right)'_y=6y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(3x^2+2xy\right)'_y=2x; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(x^2+3y^2\right)'_x=2x.$$

§3. Полный дифференциал функции двух переменных

Определение. ***Полным дифференциалом*** dz дифференцируемой функции $z = f(x; y)$ называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных, т.е.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y$$

т.к. $\Delta x\approx dx$ и $\Delta y\approx dy$, то $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy$

Очевидно, что полное приращение функции при достаточно малых Δx и Δy приближенно равно её дифференциалу, т.е. $dz\approx\Delta z$.

Пример. Вычислить полный дифференциал функции

$$z = \ln(3x + 2y).$$

Решение.

Для записи полного дифференциала функции определим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3x+2y} \cdot \left(3x+2y\right)'_x = \frac{3}{3x+2y} \quad \text{и}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3x+2y} \cdot \left(3x+2y\right)'_y = \frac{2}{3x+2y}.$$

Запишем полный дифференциал заданной функции

$$dz = \frac{3}{3x+2y} \cdot dx + \frac{2}{3x+2y} \cdot dy = \frac{3dx+2dy}{3x+2y}.$$

Пример. Вычислить приближенно $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1\right)$

Решение.

Для приближенного вычисления функции двух переменных применяют формулу

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y.$$

Примем за исследуемую функцию $z = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)$.

Пусть $x_0 = 1$, а $y_0 = 1$. Тогда $\Delta x = 1{,}03 - 1 = 0{,}03$ и $\Delta y = 0{,}98 - 1 = -0{,}02$.

Вычисляя значения частных производных в выбранной точке (1; 1), получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Bigg|_{(1;1)} = \frac{1}{3};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1} \cdot \frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}} \Bigg|_{(1;1)} = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, $\ln(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1) \approx$

$$\approx \ln(\sqrt[3]{1} + \sqrt[4]{1} - 1) + \frac{1}{3} \cdot 0{,}03 + \frac{1}{4} \cdot (-0{,}02) = 0{,}01 - 0{,}005 = 0{,}005.$$

§4. Производная сложной функции. Производная по направлению. Градиент функции

Определение. Пусть задана функция двух переменных $z = f(x; y)$, где $x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$ и функции $z = f(x; y)$, $x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$ – дифференцируемы. Тогда производная ***сложной функции*** $z = f(\varphi(t),\psi(t))$ вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Пример. Вычислить производную функции

$$z=x^2y+\sin y,\ \ x=t^2,\ \ y=e^{3t}.$$

Решение.

Находим частные производные функции $z=f(x,y)$:

При дифференцировании по x величина y считается постоянной. Поэтому:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2y)+\frac{\partial}{\partial x}(\sin y)=2x\cdot y+0$$

При дифференцировании по y величина x считается постоянной. Поэтому:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2y)+\frac{\partial}{\partial y}(\sin y)=x^2+\cos y$$

Таким образом:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=2xy\cdot 2t+(x^2+cosy)\cdot 3e^{3t}$$

$$=4t^3e^{3t}+(t^4+\cos(e^{3t}))\cdot 3e^{3t}$$

Определение. Если $z = f(x; y)$, где $y=\varphi(x)$, то ***полная производная*** от функции $z = f(x; y)$ по переменной x определяется по формуле

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Определение. Если $z = f(u; v)$, где $u=\varphi(x;y)$ и $v=\psi(x;y)$, то ***частные производные сложной функции*** $z=f(\varphi(x;y),\psi(x;y))$ выражаются следующим образом:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Если функция $z = f(x; y)$ имеет в точке $M(x; y)$ непрерывные частные производные первого порядка, то в этой точке существует и производная по любому направлению, исходящему из точки $M(x;y)$.

Производная по направлению вектора $\vec{l}$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\cos\beta,$$

где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ – ***направляющие косинусы вектора*** $\vec{l}$.

Пример. Определить производную функции $z=2x^2-y^4$ по направлению вектора $\bar{l}$, составляющем с положительным направлением оси абсцисс угол $\alpha=30^0$.

Решение.

Если функция $z=f(x;y)$ дифференцируема в точке $P(x;y)$, то $\frac{\partial z}{\partial \bar{l}}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta.$

Вычислим частные производные первого порядка для заданной функции: $\frac{\partial z}{\partial x}=4x;\ \frac{\partial z}{\partial y}=-4y^3.$

Так как $\alpha = 30^0$, то $\beta = 60^0$.

Следовательно, $\frac{\partial z}{\partial \bar{l}} = 4x\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-4y^3\right)\frac{1}{2} = 2\sqrt{3}x - 2y^3.$

Определение. ***Градиентом функции двух переменных*** **z = *f(x; y)*** ***в точке*** *M (x; y)* называется вектор плоскости *(xOy),* координаты которого равны частным производным первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial z}{\partial y}$, вычисленным в точке *M (x; y),* т.е. $grad\ \ Z = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\vec{j}.$

Градиент есть вектор, указывающий направление быстрейшего возрастания функции многих переменных.

Аналогично определяются производная по направлению и градиент функции трёх переменных $u = f(x; y; z)$ в точке *M(x; y; z)*:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma$$

$$grad\ \ U = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

где $\cos\alpha,$ $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

Пример: Вычислить градиент функции $z = 3x^2y - 3xy^2 + y^4$ в точке Р (1; 2).

Решение.

Градиент функции $z = f(x; y)$ определяется формулой $grad\ \ Z = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}$ и задаёт направление быстрейшего возрастания функции. Определим значения частных производных первого порядка в точке Р и подставим их в формулу градиента.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(6xy - 3y^2\right)_{P(1;2)} = 6\cdot1\cdot2 - 3\cdot2^2 = 12 - 12 = 0;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(3x^2-6xy+4y^3)_{P(1;2)}=3\cdot 1^2-6\cdot 1\cdot 2+4\cdot 2^3=3-12+32=23.$$

Следовательно, $grad\ \ Z\Big|_{P(1;2)}=23\bar{j}.$

§5. Экстремум функции двух переменных

Определение. Функция $z = f(x, y)$ имеет ***максимум (минимум)*** в точке $M_0\,(x_0, y_0)$, если для всех отличных от M_0 точек $M\ (x, y)$ в достаточно малой окрестности точки M_0 выполнено неравенство $f(x_0, y_0) \ge f(x, y)$ (или соответственно $f(x_0, y_0) \le f(x, y)$).

Максимумы и минимумы функции называются ***экстремумами,*** а $M_0(x_0, y_0)$ – ***экстремальной точкой***.

Теорема (необходимые условия экстремума).

Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ достигает в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума, то её частные производные первого порядка в этой точке равны нулю, т.е. $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}\ |_{M_0}=0\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}\ |_{M_0}=0\end{cases}.$

Точки, в которых частные производные первого порядка обращаются в нуль (или не существуют), называются ***критическими*** или ***стационарными***.

Теорема (достаточные условия экстремума). Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности критической точки $M_0\,(x_0, y_0)$, в которой $\dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}=0$ и $\dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}=0$, имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x^2}=A,\quad \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x\partial y}=B\ ,\quad \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial y^2}=C\,.$$

Тогда,

1) если $\Delta = AC - B^2 > 0$, то в точке *$M_0(x_0,y_0)$* функция *$z = f(x, y)$* имеет экстремум, причем если *$A > 0$ (или $C > 0$ при $A = 0$)* – минимум, если *$A < 0$ (или $C < 0$ при $A = 0$)* – максимум;

2) если $\Delta = AC - B^2 < 0$, то функция *$z = f(x, y)$* в указанной точке экстремума не имеет;

3) если $\Delta = AC - B^2 = 0$, то вопрос о наличие экстремума в исследуемой точке остается открытым (требуются дополнительные исследования).

Пример. Исследовать на экстремум функцию $z = 4x - 4y - x^2 - y^2$.

Решение.

Определим критические точки функции, для чего вычислим частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x} = 4 - 2x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -4 - 2y$.

Составим и решим систему уравнений: $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$,

то есть $\begin{cases} 4 - 2x = 0 \\ -4 - 2y = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$.

Таким образом, точка P (2; –2) – критическая.

Определим характер экстремума в точке P (2; –2), для чего вычислим:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_P = -2 < 0, \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_P = 0, \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_P = -2,$$

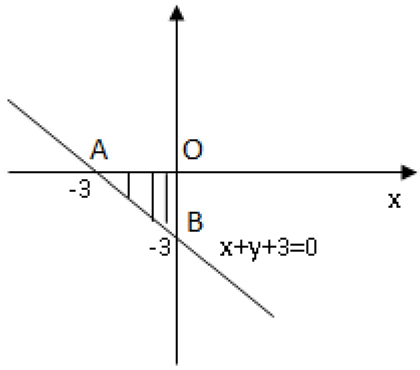
$$\Delta = AC - B^2 = (-2) \cdot (-2) - 0^2 = 4 > 0.$$

Так как $\Delta > 0$ и $A < 0$, то в точке P (2; –2) функция имеет максимум и $z_{\max} = 4 \cdot 2 - 4 \cdot (-2) - 2^2 - (-2)^2 = 8 + 8 - 4 - 4 = 8$.

Пример. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в замкнутом треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $x + y + 3 = 0.$

Решение.

Построим указанную область и определим критические точки лежащие внутри области.



Для этого вычислим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1; \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1.$$

Решая систему уравнений $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$, получим критическую точку $P(-1; -1)$, которая принадлежит области треугольника.

Значение функции в точке $z(P) = z(-1;-1) = -1.$

Определим наибольшее и наименьше значения функции на границе области. Граница заданной области состоит из отрезка оси OX ($y = 0; -3 \le x \le 0,$), отрезка оси Oy ($x = 0, -3 \le y \le 0,$) и отрезка прямой ($y = -x - 3; -3 \le x \le 0,$). Рассмотрим каждый из этих участков, найдём критическую точку внутри отрезка и вычислим значения функции в полученной точке и на концах отрезка.

На оси OX функция $z = x^2 + x$ есть функция одной переменной. Определим наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[-3;0]$.

$$z' = 2x + 1 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -0{,}5,$$

$$z(-0{,}5) = (-0{,}5)^2 + (-0{,}5) = 0{,}25 - 0{,}5 = -0{,}25;$$

$$z(A) = z(-3) = (-3)^2 + (-3) = 6;\ \ z(O) = z(0) = 0^2 + 0 = 0.$$

На оси ОУ функция z также является функцией одной переменной.

$$z = y^2 + y \Rightarrow z' = 2y + 1 \Rightarrow 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = -0{,}5;$$

$$z(-0{,}5) = -0{,}25; z(O) = z(0) = 0; z(B) = z(-3) = 6.$$

Рассмотрим прямую $y = -x - 3; -3 \le x \le 0,$ тогда

$$z = x^2 + \left(-x - 3\right)^2 - x(-x - 3) + x + (-x - 3).$$

$$z = 3x^2 + 9x + 6 \Rightarrow z' = 6x + 9 \Rightarrow 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -1{,}5.$$

Тогда $z(-1{,}5) = 2{,}25$ и z(A)=6, z(B)=6.

Таким образом, наибольшее значение заданная функция в заданной замкнутой области достигает на границе в точках А и В, а наименьшее в точке $P(-1; -1)$, причём $z_{наибольшее} = 6;\ z_{наименьшее} = -1.$

Задания для самостоятельного решения

1. Для указанных функций определить:

1) частные производные первого порядка и записать полный дифференциал;

2) частные производные второго порядка.

1. $z = \ln\sqrt{x^3 + y^3}$

2. $z = arctg\dfrac{y}{x}$

3. $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{x}$

4. $z = \dfrac{xy}{4x - y}$

16. $z = \ln\sin\left(x - 2y\right)$

17. $z = \dfrac{x - y}{x + y}$

18. $z = x^3 - 4x^2y + 5y^2$

19. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

5. $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

6. $z=\dfrac{x^2}{1-5y}$

7. $z=e^{x^2+2y^2}$

8. $z=\sin^2(3y+2x)$

9. $z=x^y$

10. $z=x^2y^4-x^3y^3+x^4y^2$

11. $z=\dfrac{2xy}{x-y}$

12. $z=x^{y^2}$

13. $z=\ln tg\dfrac{x}{2y}$

14. $z=\dfrac{x^3}{1-5y}$

15. $z=\dfrac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}$

20. $z=\ln\left(1+\dfrac{x}{y}\right)$

21. $z=e^x\ln y+\sin y\ln x$

22. $z=\dfrac{x^2y^2}{x+y}$

23. $z=y^{\ln x}$

24. $z=e^{\frac{x}{\sqrt{y}}}$

25. $z=y^2\sqrt{\ln x}$

26. $z=e^{xe^y}$

27. $z=\sin^2(xy)$

28. $z=arctg(3xy)$

29. $z=\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$

30. $z=\ln\left(1-\dfrac{\sqrt{y}}{x}\right)$

2. Определить для указанных функций:

1) градиент функции в заданной точке;

2) производную функции по направлению вектора $\vec{l}$ в этой же точке.

1. $z=x^2-xy-2y^2$, М (1; 1). Направление – под углом 30° к оси (Ох).

2. $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$, М (0; 0). Направление под углом 60° к оси (Ох).

3. $z=\ln(x+y)$, М (1; 2). Направление – 45° к оси (Ох).

4. $z=5x^2-3x-y-1$, М (2; 1). Направление от точки М к точке N (5; 5).

5. $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, М (3; 4). Направление – биссектриса второго координатного угла.

6. $z=x^3-2x^2y+3xy^2+1$, М (3; 1). Направление от точки М к точке N (6; 5).

7. $u=xy^2+z^3-xyz$, М (1; 1; 2). Направление к осям координат соответственно 60°, 45°, 60°.

8. $z=arctg(xy)$, М (2; 2). Направление, параллельное биссектрисе первого координатного угла.

9. $z=x^2y^2-xy^3-3y-1$, М (2; 1). Направление, идущее от точки М к началу координат.

10. $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$, М (a; b; c). Направление – радиус-вектор точки М.

11. $z=\sqrt{x^2-y^2+4}$, М (3; 2). Направление – под углом 45° к оси (Ох).

12. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, М (2; –1). Направление – под углом 30° к оси (Ох).

13. $z=arctg\frac{y}{x}$, М (1; –1). Направление – под углом 60° к оси (Ох).

14. $z=20-\frac{x^2}{4}-y^2$, М (2; 1). Направление – биссектриса второго координатного угла.

15. $z=\sqrt{1+x^2+y^2}$, М (2; 2). Направление – радиус-вектор точки М.

16. $z=4-x^2-y^2$, М (1; 2). Направление, идущее от точки М к началу координат.

17. $u=xy+yz+xz$, М (1; 2; 4). Направление от точки М к точке N (3; 5; 5).

18. $z = arctg\left(xy^2\right)$, M (1; 1). Направление биссектрисы первого координатного угла.

19. $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2 + 14}$, M (3; 2). Направление из точки M в начало координат.

20. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, M (1; 2; 2). Направление – радиус-вектор точки M.

21. $z = \dfrac{4}{x^2 + y^2}$, M (–1; 2). Направление от точки M к точке N (2; 6).

22. $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$, M (2; 1). Направление – под углом 45° к оси (Ox).

23. $u = x^2 y^2 z^2$, M(1; 1; 1). Направление от точки M к точке N (0; 2; 3).

24. $z = arctg\,\dfrac{y^2}{x^2}$, M (3; 3). Направление от точки M к точке D (6; 7).

25. $z = e^{x-2y}$, M (2; 1). Направление – под углом 30° к оси (Ox).

26. $u = \sqrt{xyz}$, M (2; 1; 2). Направление – радиус-вектор точки M.

27. $z = \arcsin\sqrt{\dfrac{y}{x}}$, M (4; 1). Направление под углом 60° к оси (Ox).

28. $z = arctg\left(x^2 y\right)$, M (1; 1). Направление биссектрисы первого координатного угла.

29. $z = \arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, M (1; 4). Направление под углом 30° к оси (Ox).

30. $z = \sqrt[3]{3x^2 + y^2 + 6}$, M (2; 3). Направление из точки M в начало координат.

3. Определите экстремум функции двух переменных

1. $z = 2x^3 + 6xy^2 - 30x - 24y$ **16.** $z = e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 + y^2\right)$

2. $z = -\dfrac{1}{2}x^2 + 8xy - y^3 - 13x - 12y$ **17.** $z = e^{-2x^2}\left(x - y^2\right)$

3. $z = 6x^2y + 2y^3 - 24x - 30y$

4. $z = x^3 - 8y^3 - 6xy + 1$

5. $z = x^3 - xy^2 + 3x^2 + y^2 - 1$

6. $z = x^2y - \frac{1}{3}y^3 + 2x^2 + 3y^2 - 1$

7. $z = x^3 + 6xy + 3y^2 - 18x - 18y$

8. $z = x^2y - y^3 - x^2 - 3y^2 + 3$

9. $z = 3x^2 - 6xy - y^3 - 12x + 12y$

10. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$

11. $z = x^2y - 2y^3 - x^2 - 5y^2$

12. $z = 2x^3 + y^2 + 6xy + 12x$

13. $z = 8x^3 - y^3 - 12xy - 1$

14. $z = 2x^3 - 12x^2y + 16y^3 - 9x^2$

15. $z = -8x^3 + 6xy^2 + y^3 + 9y^2$

18. $z = e^{-\frac{y}{2}}\left(x^2 - y\right)$

19. $z = e^{-2y^2}\left(x^2 + y\right)$

20. $z = x^3 - y^3$

21. $z = 2y\sqrt{x} - y^2 - 3x + 8y$

22. $z = x^2 - 4x\sqrt{y} - 2x + 5y$

23. $z = e^{-\frac{x}{4}}\left(5x^2 - y^2\right)$

24. $z = 2x^2 + 3xy + 2y^3 + 5x$

25. $z = x^3 - 5xy + 5y^2 + 7x - 15y$

26. $z = 2x^2 - 5xy + 2y^3 - 3x + 4y$

27. $z = 3x^2 + 10xy + 6y^3 + 2x + 2y - 1$

28. $z = 3x^3 + 7xy - \frac{7}{2}y^2 - 60x + 2$

29. $z = 3x^2 - 2y\sqrt{x} + 0{,}5y^2 - 56x$

30. $z = -2x^3 + 3x\sqrt{y} + 18x - 1{,}5y$

§6. Метод наименьших квадратов

На практике исследователь часто сталкивается с задачей описания наблюдаемых экономических показателей с помощью математической формулы. В ситуациях, когда тип зависимости известен заранее, необходимо вычислить лишь ее параметры. Для решения этой задачи используется метод наименьших квадратов, суть которого заключается в подборе параметров таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений (расхождений) между реальными данными и модельными значениями была минимальной.

Например, для ***линейной зависимости*** формула нахождения суммы квадратов отклонений имеет вид:

$$S(a;b)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(ax_i+b\right)-y_i\right]^2\to\min;$$

для ***квадратичной зависимости***:

$$S(a;b;c)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(ax_i^2+bx_i+c\right)-y_i\right]^2\to\min.$$

Формулы для вычисления коэффициентов линейной зависимости получаются из условий $\frac{\partial S}{\partial a}=0;\ \frac{\partial S}{\partial b}=0$:

$$\begin{cases} a\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i, \\ a\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+nb=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i \end{cases}.$$

А из условий $\frac{\partial S}{\partial a}=0;\ \frac{\partial S}{\partial b}=0;\ \frac{\partial S}{\partial c}=0$ получены формулы для определения коэффициентов квадратичной зависимости:

$$\begin{cases} a\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^4+b\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3+c\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2y_i, \\ a\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3+b\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+c\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i, \\ a\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+nc=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i. \end{cases}$$

Пример. В таблице приведены фактические данные о количестве запущенных в производство (x) и выпущенных промышленных изделий (y). Предполагая, что между переменными x и y существует линейная зависимость, найти эмпирическую формулу вида $y=ax+b,$ используя метод наименьших квадратов.

Решение.

Запуск (x)	13	14	15	18	20	22
Выпуск (y)	11,6	12,9	14,1	17,2	18,7	20,9

Система нормальных уравнений для определения коэффициентов a и b имеет вид:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{6} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{6} x_i = \sum_{i=1}^{6} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{6} x_i + 6b = \sum_{i=1}^{6} y_i \end{cases}.$$

Для определения значений коэффициентов a и b исходные данные и промежуточные вычисления удобно располагать в следующей расчётной таблице:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$f(x_i)$	ε_i	ε_i^2
1	13	11,6	169	150,8	11,9	0,3	0,09
2	14	12,9	196	180,6	12,9	0	0
3	15	14,1	225	211,5	13,9	-0,2	0,04
4	18	17,2	324	309,6	16,9	-0,3	0,09
5	20	18,7	400	374,0	18,9	0,2	0,04
6	22	20,9	484	459,8	20,9	0	0
сумма	102	95,4	1798	1686,3			0,026

Сначала заполним первые пять столбцов расчётной таблицы. Полученные в результате значения соответствующих сумм определяют конкретный вид системы нормальных уравнений:

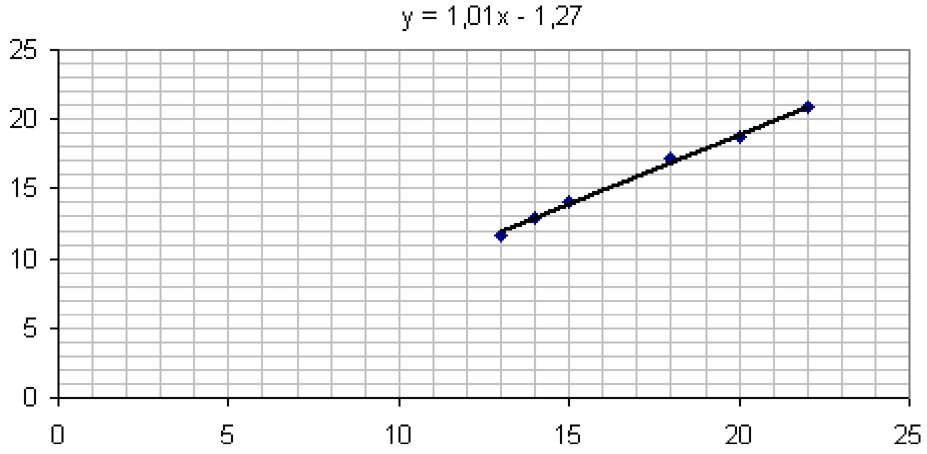
$$\begin{cases} 1798a + 102b = 1686{,}3 \\ 102a + 6b = 95{,}4 \end{cases},$$

Решая систему, получим *a=1,01; b= –1,27*.

Таким образом, эмпирическая зависимость имеет вид $f(x) = 1{,}01x - 1{,}27$.

Продолжив заполнять расчётную таблицу, мы определим сумму квадратов отклонений расчётных и заданных значений y, т.е. вычислим $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = 0{,}026$.

На рисунке изображены координаты точек (x_i, y_i) и прямая.



Задания для самостоятельного решения

Используя метод наименьших квадратов, оценить, какая из зависимостей – линейная, квадратичная или гиперболическая наилучшим образом отражает связь между переменными x и y.

1. Эффективность откорма поросят определяется зависимостью у – привеса одной головы, выраженного в кг, от затрат х на одну голову выраженных в рублях, задана таблицей.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	1	1,5	3	3,5	4	8	10

2. Зависимость количества потреблённого корма на одну голову телёнка у кг за месяц от возраста животного х в месяцах задана таблицей.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	18	30	48	66	84	96	102

3. Поголовье свиней в хозяйстве определяется зависимостью y – процента выживаемости от веса поросят при рождении – x (кг).

x_i	1,06	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,17
y_i	75	85,7	80	85,7	92,8	88,1	89,6

4. Зависимость живой массы КРС y в кг при умеренном кормлении от возраста животного в месяцах задана таблицей.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	39,8	46,5	63,6	82	97,5	109,7	126

5. Динамика линейного прироста кобылы арабской породы определяется зависимостью y – обхвата груди (выраженного в см) от x – возраста, выраженного в месяцах, задана таблицей.

x_i	3	4	5	6	7	8	9
y_i	120,6	125,2	130,3	135,2	140	145,2	150,2

6. Эффективность откорма цыплят бройлеров можно оценить зависимостью y – привеса одного цыпленка, выраженного в граммах, от затрат x – на одного цыплёнка, выраженных в рублях, задана таблицей.

x_i	5	10	15	20	30	35	40
y_i	50	150	200	250	350	400	450

7. Эффективность откорма свиней определяется зависимостью y – среднесуточного прироста в кг, от денежных затрат x – в рублях.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	0,7	0,75	0,8	0,83	0,9	1,0	1,1

8. Эффективность откорма молодняка КРС определяется зависимостью y – суточного привеса на одну голову в кг, от x – затрат на одного телёнка в сутки.

x_i	1	1,5	2	2,7	2,9	3	3,5
y_i	0,37	0,39	0,42	0,45	0,48	0,5	0,54

9. Эффективность мясного откорма свиней определяется зависимостью у – выхода мяса в центнерах, от х – живой массы в центнерах.

x_i	0,95	1,3	1,32	1,4	1,43	1,47	1,5
y_i	0,6	0,67	0,71	0,73	0,80	0,83	0,86

10. Эффективность использования концентрированных кормов в рационе КРС определяется зависимостью у суточного удоя молока (в литрах) от денежных затрат х на голову в сутки.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	6	6,5	7	7,9	8	8,6	9

11. Эффективность роста и развития бычков чёрно-пёстрой породы при повышенном уровне кормления выражается зависимостью у – живой массы, выраженной в кг, от возраста х, выраженного в месяцах.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	32	48	63	78	94	109	125

12. В таблице указана зависимость урожайности зерновых культур – у, выраженная в ц/га от качества земли х, выраженного в баллах.

x_i	32	33	35	37	38	39	40
y_i	19,5	19,0	20,5	21,0	20,8	21,4	23

13. В таблице указана зависимость урожайности зерновых культур – у, выраженная в ц/га от качества земли х, выраженного в баллах.

x_i	41	42	44	45	46	47	49
y_i	23,3	24	24,5	24,2	25	27	26,8

14. Эффективность внесения удобрений под зерновые культуры определяется зависимостью у – урожайности зерна (ц/га) от нормы внесения удобрений х (т/га).

x_i	6,5	6,0	5,5	7,5	8	6,8	7,0

y_i	21	20,5	19,0	23,0	23,5	22,5	21,5

15. Эффективность использования органических удобрений под зерновые культуры определяется зависимостью средней урожайности зерновых – y (ц/га) от внесённых органических удобрений – x (т/га).

x_i	8	14	16,7	19,5	20,5	21,2	21,6
y_i	2,5	6	7	11,2	7,9	12,1	15,2

16. Приводятся данные о весе зерна в мг (x) и процентном содержании жира в зерне (y).

x_i	35	40	43	48	49	47	45
y_i	4	5	5	7	7	6	8

17. Приводятся данные о количестве внесённых удобрений в центнерах (x) и урожае сахарной свёклы с 1 га в тоннах (y).

x_i	3	4	5	6	7	8	9
y_i	18	20	24	29	30	36	50

18. В результате исследования зависимости между сроком эксплуатации автомобиля (t – лет) и расходами на его ремонт (s – тыс. руб.) получены следующие данные:

t_i	1	2	3	4	5	6	7
s_i	120	140	230	370	445	570	655

19. Прибыль предприятия (y – тыс. руб.) за некоторый период деятельности по годам (x – год) приведена ниже:

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	54	57	62	65	67	69	70

20. В таблице приведены высота стеблей (x см) и масса 1000 зёрен (y – граммы) различных сортов яровой мягкой пшеницы российской селекции, 1999 год:

сорт	Алтайская 50	Алтайская 81	Саратовская 29	Вега	Целинная 60	Алтайский простор	Омская 9
x_i	48,4	47,6	51,9	41,6	45	48,4	39,8
y_i	31,41	29,92	33,87	31,42	32,23	31,59	32,34

21. В таблице приведены данные о средней высоте стеблей (в см) различных сортов яровой мягкой пшеницы российской селекции без применения и с применением удобрений за 1998-2000 годы (в условиях умеренно засушливой степи Алтайского края):

сорт	Алтайская 50	Алтайская 81	Саратовская 29	Вега	Целинная 60	Алтайский простор	Омская 9
x_i	58,8	53,7	56,7	55,9	57,2	58,4	59,1
y_i	60,3	53,7	60,1	60,2	58,8	64,5	65,2

22. В таблице приведены данные о средней массе 1000 зёрен (в г) различных сортов яровой мягкой пшеницы российской селекции без применения и с применением удобрений за 1998-2000 годы (в условиях умеренно засушливой степи Алтайского края):

сорт	Алтайская 50	Алтайская 81	Саратовская 29	Вега	Целинная 60	Алтайский простор	Омская 9
x_i	32,01	30,77	33,42	30,51	31,11	32,74	32,47
y_i	32,94	31,32	33,20	31,94	30,84	32,94	35,40

23. В таблице приведены данные о среднем количестве зёрен в колосе (в шт.) различных сортов яровой мягкой пшеницы российской селекции без применения и с применением удобрений за 1998-2000 годы (в условиях умеренно засушливой степи Алтайского края):

сорт	Алтайская 50	Алтайская 81	Саратовская 29	Вега	Целинная 60	Алтайский простор	Омская 9
x_i	21,94	20,99	22,23	22,96	25,18	25,74	22,24
y_i	23,64	23,92	24	84	29,45	26,36	29,64

24. В таблице приведены данные о средней высоте стеблей (в см) и средней урожайности (в т/га) различных сортов яровой мягкой пшеницы российской селекции с применением удобрений за 2000 год (в условиях умеренно засушливой степи Алтайского края):

сорт	Алтайская 50	Алтайская 81	Саратовская 29	Вега	Целинная 60	Алтайский простор	Омская 9
x_i	84,8	66,2	80,7	80,7	80,5	89,6	93,5
y_i	6,20	4,48	5,66	7,27	5,98	7,73	7,25

25. В таблице приведены данные о средней высоте стеблей (в см) и средней урожайности (в т/га) различных сортов яровой мягкой пшеницы российской и немецкой селекции с применением удобрений 2000 год (в условиях умеренно засушливой степи Алтайского края):

сорт	Россиянка	Алтайская 92	Лютесценс 25	Hanno	Thasos	Naxos	Star
x_i	81,4	80,3	70,6	65,0	83,6	79,2	83,2
y_i	6,61	6,43	5,71	6,25	6,86	6,64	7,06

26. В таблице приведены данные о средней высоте стеблей (в см) различных сортов яровой мягкой пшеницы российской и немецкой селекции без применения и с применением удобрений за 1998-2000 год (в условиях умеренно засушливой степи Алтайского края):

сорт	Россиянка	Алтайская 92	Лютесценс 25	Hanno	Thasos	Naxos	Star
x_i	54,5	54,8	53,3	46,3	53,1	43,9	50,2
y_i	61,5	60,0	54,8	44,3	51,8	49,1	50,3

27. В таблице приведены данные зависимости урожайности y (ц/га) от глубины заделки семян в почву x (см):

x_i	1,3	1,5	1,6	1,8	2	2,3	2,5	2,6	2,8	3
y_i	9,5	10,1	10,7	11,6	13,2	13,5	14	14,2	14,5	14,7

28. В таблице приведены данные о зависимости урожайности зерновых культур y (ц/га) от количества внесённых в почву минеральных удобрений x (ц/га):

x_i	1,2	2,7	3,1	5,8	2,9	2,7	0,2	2,3	1,9	2,4
y_i	14,2	17,8	19,1	22,2	18,6	17,9	8,1	16,4	15,4	16,5

29. В таблице приведены данные о зависимости уровня продаж y (тыс. ед.) мороженного от его цены x (усл. ед.):

x_i	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0
y_i	200	160	120	90	80	70	65	40	30

30. В таблице приведены данные о зависимости расхода масла y (л/ тыс. км) от величины пробега автомобиля x (тыс. км.):

x_i	50	70	90	110	130	150	170	190	210
y_i	0,2	0,5	0,8	1,1	1,3	1,5	1,6	1,8	2,0

Тема 2. Дифференциальные уравнения

§1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Определение. ***Дифференциальным уравнением первого порядка*** называется уравнение, в которое входит неизвестная функция, независимая переменная и производная функции $F(x, y, y') = 0$.

Определение. ***Решением дифференциального уравнения*** называется такая функция $y = y(x)$, которая при подстановке ее в это уравнение обращает его в тождество.

Определение. ***Общим решением дифференциального уравнения*** 1- го порядка называется такое его решение $y = \varphi(x, C)$, которое является функцией переменной x и произвольной постоянной C.

Основные типы дифференциальных уравнений 1-го порядка

1) Неполные дифференциальные уравнения 1-порядка:

$$y' = f(x) \text{ (не содержит } y\text{)}$$

$$y' = f(y) \text{ (не содержит } x\text{)}$$

2) Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

или $$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0.$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(3 + y)xdx + (x + 1)ydy = 0.$$

Решение.

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, так как в при каждом дифференциале стоит произведение функций только одного аргумента. Необходимо сформировать при дифференциале каждой переменной функцию только этой переменной, чтобы можно было вычислить интеграл.

Сначала перенесем одну часть уравнения в правую сторону:

$$(3+y)xdx = -(x+1)ydy.$$

При dx «лишним» является сомножитель $(3+y)$.

Полагая $(3+y)\neq 0$ поделим на него все уравнение, получим

$$xdx = -\frac{(x+1)ydy}{(3+y)}.$$

Теперь при dy «лишним» является сомножитель $(x+1)$. Поделим на него все уравнение, полагая $(x+1)\neq 0$. В результате получим выражение $\frac{xdx}{(x+1)} = -\frac{ydy}{(3+y)}$, которое можно проинтегрировать:

$$\int \frac{xdx}{(x+1)} = -\int \frac{ydy}{(3+y)}$$

После вычисления интегралов будет найдено общее решение (общий интеграл) исходного уравнения: $x - \ln|x+1| = -y + 3\ln|3+y| + c$.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'\sqrt{x} + (2y+3)^2 = 0.$$

Решение.

Запишем данное уравнение в дифференциалах, используя равенство $y' = \frac{dy}{dx}$. Таким образом получается $\frac{dy}{dx}\sqrt{x} = -(2y+3)^2$.

Умножим обе части на *dx*: $\sqrt{x}dy = -(2y+3)^2 dx$.

С помощью алгебраических преобразований разделим переменные, поделив уравнение на $\sqrt{x}$ ($\sqrt{x}\neq 0$) и $(2y+3)^2$.

В результате получим выражение $\frac{dy}{(2y+3)^2} = -\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Проинтегрируем обе части равенства: $\int \frac{dy}{(2y+3)^2} = -\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Вычислив интегралы, найдем общее решение (общий интеграл) исходного уравнения: $\frac{1}{4y+6} = 2\sqrt{x} + c$.

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения $2(1+e^x)yy' = e^x$ при заданных начальных условиях $y(0)=1$.

Решение.

Частное решение находится из общего, поэтому сначала найдем общее решение дифференциального уравнения.

Воспользовавшись равенством $y' = \frac{dy}{dx}$, запишем уравнение в дифференциалах:

$$2(1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x.$$

Умножим обе части равенства на dx: $2(1+e^x)ydy = e^x dx$.

Поделив все уравнение на выражение $(1+e^x) \neq 0$ получим:

$$2ydy = \frac{e^x dx}{(1+e^x)}.$$

Проинтегрируем обе части равенства: $2\int ydy = \int \frac{e^x dx}{(1+e^x)}$.

Вычислив интегралы, найдем общее решение исходного уравнения:

$$y^2 = \ln\left|1+e^x\right| + c.$$

Произвольную постоянную удобнее записать в виде $\ln c$. Тогда общее решение будет иметь вид: $y^2 = \ln\left|1+e^x\right| + \ln c$.

Преобразуем его по свойству логарифма $\ln a + \ln b = \ln ab$:

$$y^2 = \ln\left(c\left|1+e^x\right|\right).$$

Теперь найдем частное решение. Начальные условия заданы в виде $y(0)=1$, т.е. $x_0=0$ $y_0=1$. Подставим заданные значения x_0 и y_0 в общее решение и найдем значение произвольной постоянной *c:*

$$1^2=\ln\left(c\left|1+e^0\right|\right) \Rightarrow \ln 2c=1 \Rightarrow 2c=e \Rightarrow c=e/2.$$

Чтобы записать частное решение подставим найденное значение C в общее решение: $y^2=\ln\left(\frac{e}{2}\left|1+e^x\right|\right)$.

3) Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка:

$$y'=g(y/x)$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $xdy-ydx=ydy$.

Решение.

Сгруппируем выражения при дифференциалах переменных:

$$(x-y)dy=ydx.$$

В полученном уравнении при дифференциале dy нельзя с помощью алгебраических преобразований разделить переменные. Следовательно, оно не является уравнением с разделяющимися переменными.

Проверим, является ли оно однородным. Для этого разделим всё уравнение на dx: $(x-y)\frac{dy}{dx}=y \Rightarrow (x-y)y'=y$ (1).

Однородное уравнение имеет вид $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Проверить уравнение на однородность можно следующим образом: подставим в уравнение вместо $x\to tx$, а вместо $y\to ty$ (y' остается без изменений) и преобразуем полученное выражение:

$$(tx-ty)y'=ty \Rightarrow t(x-y)y'=ty.$$

Все выражение можно сократить на t и получится исходное уравнение, значит оно является однородным.

Решаются однородные уравнения с помощью подстановки

$$y(x) = xu(x) \qquad (2),$$

где $u(x)$ – неизвестная функция, которую надо найти.

Продифференцировав уравнение подстановки (2) найдем выражение для производной y': $y' = u + xu'$ (3).

Подставив оба выражения (2) и (3) в уравнение (1) получим:

$$(x - xu)(u + xu') = xu \quad (4).$$

Новое уравнение решается относительно функции $u(x)$, причем оно всегда является уравнением с разделяющимися переменными. Преобразуем полученное уравнение так, чтобы разделить переменные:

– вынесем x за скобки: $(x - xu)(u + xu') = xu \quad \Rightarrow$

$$x(1 - u)(u + xu') = xu$$

– поделим на x: $(1-u)(u + xu') = u$

– раскроем скобки: $(1-u)u + (1-u)xu' = u \quad \Rightarrow$

$$u - u^2 + (1-u)xu' = u$$

– приведем подобные: $(1-u)xu' = u^2$

– запишем уравнение в дифференциалах $(u' = \dfrac{du}{dx})$:

$$(1-u)x\frac{du}{dx} = u^2$$

– умножим обе части равенства на dx: $(1-u)xdu = u^2dx$

– разделим переменные, поделив обе части равенства на сомножители $x \neq 0$ и $u^2 \neq 0$:

$$(1-u)du = \frac{u^2}{x}dx \;\Rightarrow\; \frac{(1-u)}{u^2}du = \frac{dx}{x}.$$

Теперь упростим полученное выражение:

$$\left(\frac{1}{u^2} - \frac{u}{u^2}\right)du = \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \left(u^{-2} - \frac{1}{u}\right)du = \frac{dx}{x}.$$

Общее решение (общий интеграл) уравнения (4) найдем, вычислив интегралы:

$$\int\left(u^{-2}-\frac{1}{u}\right)du=\int\frac{dx}{x}\;\Rightarrow\;\frac{-1}{u}-\ln u=\ln x+c \qquad (5).$$

Чтобы найти общее решение исходного уравнения (1) надо из подстановки (2) выразить функцию $u=\dfrac{y}{x}$ и подставить в полученное общее решение (5) уравнения (4): $\dfrac{-1}{y/x}-\ln\dfrac{y}{x}=\ln x+c$.

Преобразуем полученный результат, воспользовавшись свойством $\ln\dfrac{a}{b}=\ln a-\ln b$: $\quad \dfrac{-x}{y}-\ln y+\ln x=\ln x+c \qquad \Rightarrow \quad \dfrac{-x}{y}-\ln y=c \quad \Rightarrow$

Общее решение $\dfrac{x}{y}+\ln y+c=0$.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy+y^2-2x^2y'=xyy'$$

Решение.

Исходное уравнение преобразуем к виду:

$$xy+y^2=(xy+2x^2)y' \qquad (1).$$

Попробуем разделить переменные. Для этого сгруппируем выражения при производной:

$$xy+y^2=(xy+2x^2)y' \;\Rightarrow\; (xy+y^2)=(xy+2x^2)\frac{dy}{dx} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x+y)dx=x(y+2x)dy.$$

Убедились, что разделить переменные невозможно.

Проверим, является ли оно однородным: заменим в уравнении (1) x на tx, а y на ty (y' остается без изменений) и преобразуем полученное выражение:

$$txty+(ty)^2=(txty+2(tx)^2)y' \quad\Rightarrow\quad t^2(xy+y^2)=t^2(xy+2x^2)y'.$$

Все выражение можно сократить на t^2 и получится исходное уравнение, следовательно оно является однородным.

Применим подстановку $y(x) = xu(x)$ (2), где $u(x)$ – неизвестная функция, которую надо найти.

Продифференцируем выражение (2): $y' = u + xu'$ (3).

Подставив оба выражения (2) и (3) в уравнение (1) получим:

$$x^2u + x^2u^2 = (x^2u + 2x^2)(u + xu') \quad (4).$$

Решим новое уравнение относительно функции $u(x)$, выполнив последовательно действия:

– вынесем x^2 за скобки: $x^2(u + u^2) = x^2(u+2)(u + xu')$

– поделим на x^2: $(u + u^2) = (u+2)(u + xu')$

– раскроем скобки: $u + u^2 = u^2 + 2u + (u+2)xu'$

– приведем подобные: $(u+2)xu' = -u$

– запишем уравнение в дифференциалах $(u' = \dfrac{du}{dx})$:

$$(u+2)x\frac{du}{dx} = -u$$

– умножим все уравнение на dx: $(u+2)xdu = -udx$.

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Решим его, поделив обе части равенства на сомножители

$x \neq 0$ и $u \neq 0$: $(u+2)du = \dfrac{-u}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \dfrac{(u+2)}{u}du = -\dfrac{dx}{x}$.

Теперь упростим полученное выражение: $\left(1 + \dfrac{2}{u}\right)du = -\dfrac{dx}{x}$.

Найдем общее решение уравнения (4):

$$\int\left(1 + \frac{2}{u}\right)du = -\int\frac{dx}{x} \Rightarrow u + 2\ln u = -\ln x + c.$$

Чтобы записать общее решение исходного уравнения (1) выразим из подстановки (2) функцию $u = \dfrac{y}{x}$ и подставим в полученное равенство:

$$\frac{y}{x}+2\ln\frac{y}{x}=-\ln x+c.$$

Преобразуем полученный результат, воспользовавшись свойством $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$:

$$\frac{y}{x}+2\ln y-2\ln x=-\ln x+\ln c \Rightarrow \frac{y}{x}+2\ln y-\ln x=\ln c \Rightarrow$$

Общее решение исходного уравнения: $\ln\frac{cx}{y^2}=\frac{y}{x}$.

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения $2x^2y'=x^2+y^2$ при заданных начальных условиях $y(1)=0$.

Решение.

Запишем уравнение в дифференциалах, чтобы попытаться разделить переменные: $2x^2dy=(x^2+y^2)dx$.

Очевидно, что при *dx* разделить переменные невозможно.

Проверим, является ли оно однородным:

– заменим в уравнении *x* на *tx*, а *y* на t*y* (y' остается без изменений): $2(tx)^2y'=(tx)^2+(ty)^2$;

– преобразуем полученное выражение: $2t^2x^2y'=t^2(x^2+y^2)$.

Все выражение можно сократить на t^2 и получится исходное уравнение, следовательно, оно является однородным.

Сделаем замену $y(x)=xu(x)$, $y'=u+xu'$.

Тогда $2x^2(u+xu')=x^2+(xu)^2 \Rightarrow 2x^2(u+xu')=x^2(1+u^2)$.

Полагая, что $x\neq 0$, сократим обе части уравнения на x^2:

$$2(u+xu')=1+u^2.$$

Запишем полученное уравнение через дифференциалы ($u'=\frac{du}{dx}$):

$$2u+2x\frac{du}{dx}=1+u^2 \Rightarrow 2xdu=(1+u^2-2u)dx.$$

Разделим переменные: $\dfrac{du}{1+u^2-2u}=\dfrac{dx}{2x} \Rightarrow \dfrac{du}{(u-1)^2}=\dfrac{dx}{2x}$.

Проинтегрируем обе части равенства $\Rightarrow \displaystyle\int\frac{du}{(u-1)^2}=\int\frac{dx}{2x} \Rightarrow$

$-\dfrac{1}{u-1}=\dfrac{1}{2}\ln|x|+c \Rightarrow 1=(1-u)(c+\ln\sqrt{|x|})$.

В последнее выражение подставим $u=\dfrac{y}{x}$.

Получим: $1=(1-\dfrac{y}{x})(\ln\sqrt{|x|}+c)$.

Разрешив его относительно y, найдем общее решение (общий интеграл) исходного дифференциального уравнения:

$$y=x-\frac{x}{\ln\sqrt{|x|}+c}.$$

Используя начальное условие $y(1)=0$, определим значениеn c. Для этого подставим в общее решение значения $y=0$ и $x=1$:

$$0=1-\frac{1}{\ln\sqrt{|1|}+c} \Rightarrow \boldsymbol{c=1}.$$

Найденное значение c подставим в общее решение, тогда частное решение исходного уравнения будет записано в виде: $y=x-\dfrac{x}{\ln\sqrt{|x|}+1}$.

4) Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка:

$$y'+f(x)y=g(x),$$

Если $g(x)=0$ уравнение называется ***однородным***, в противном случае – ***неоднородным***.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}$.

Решение.

Запишем уравнение в дифференциалах ($y' = \frac{dy}{dx}$), чтобы попытаться разделить переменные: $dy = (\frac{1}{\cos x} - ytgx)dx$.

Очевидно, что при *dx* разделить переменные невозможно.

Проверим, является ли уравнение однородным: заменим *x* на *tx*, а *y* на *ty* (y' остается без изменений): $y' + ty\,\mathrm{tg}\,tx = \frac{1}{\cos tx}$.

В полученном уравнении сократить на *t* не получится, следовательно, оно не является однородным.

Проверим, является ли оно линейным. Уравнение вида $P(x)y' + Q(x)y = f(x)$, линейное относительно неизвестной функции *y* и ее производной y', называется линейным. Важно, чтобы в левой части уравнения при y' и y и в правой части уравнения стояли функции только аргумента x. Очевидно, что исходное уравнение является линейным.

Решим уравнение методом Бернулли с помощью подстановки $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ и $y' = u'v + uv'$.

Получим $u'v + uv' + uv\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}$. Перегруппируем полученное уравнение: $u'v + u(v' + v\,\mathrm{tg}\,x) = \frac{1}{\cos x}$.

По методу Бернулли решение этого уравнения равносильно решению системы двух дифференциальных уравнений: $\begin{cases} v' + v\,\mathrm{tg}\,x = 0 \\ u'v = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$. При этом каждое уравнение решается отдельно.

Решим сначала первое уравнение $v' + v\,\mathrm{tg}\,x = 0$, причем будем искать его частное решение.

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными:

$$v' + v\,\mathrm{tg}\,x = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dx} = -v\,\mathrm{tg}\,x \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v} = -\mathrm{tg}\,x dx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \int \frac{dv}{v} = -\int \mathrm{tg}\,x dx \;\Rightarrow\; \ln|v| - \ln|\cos x| = \ln c.$$

Полагая $c = 1$, выбираем частное решение $v = \cos x$.

Теперь найдем общее решение второго уравнения $u'v = \dfrac{1}{\cos x}$.

Подставим в него найденную функцию $v = \cos x$.

В этом уравнении также можно разделить переменные:

$$u'\cos x = \frac{1}{\cos x} \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx}\cos x = \frac{1}{\cos x} \;\Rightarrow\; du = \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\int du = \int \frac{dx}{\cos^2 x} \;\Rightarrow\; u = tgx + c.$$

Общее решение исходного уравнения:

$$y(x) = u(x)\cdot v(x) = (tgx + c)\cos x.$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' + x^2 = \frac{2y}{x}.$$

Решение.

Запишем уравнение в дифференциалах ($y' = \dfrac{dy}{dx}$), чтобы попытаться разделить переменные: $dy = (\dfrac{2y}{x} - x^2)dx$. Очевидно, что при dx разделить переменные невозможно.

Проверим, является ли уравнение однородным: заменим x на tx, а y на ty (y' остается без изменений): $y' + t^2x^2 = \dfrac{2ty}{tx}$.

В полученном уравнении сократить на ***t*** не получится, следовательно, оно не является однородным.

Преобразуем уравнение так, чтобы в левой части находились неизвестная функция y и ее производная y': $y' - \frac{2y}{x} = -x^2$.

Исходное уравнение является линейным. Применим подстановку Бернулли $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ и $y' = u'v + uv'$:

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = -x^2.$$

После перегруппировки получим: $u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = -x^2$.

Решение полученного уравнения равносильно решению системы двух дифференциальных уравнений: $\begin{cases} v' - \frac{2v}{x} = 0 \\ u'v = -x^2 \end{cases}$.

Решим сначала первое уравнение $v' - \frac{2v}{x} = 0$.

Оно является уравнением с разделяющимися переменными:

$$v' - \frac{2v}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = 2\ln|x| + c.$$

Выберем частное решение, полагая $c = 0$:

$$\ln|v| = 2\ln|x| \quad \Rightarrow \quad v = x^2.$$

Далее ищем общее решение второго уравнения системы $u'v = -x^2$.

Подставим в него найденную функцию $v = x^2$. В этом уравнении также можно разделить переменные:

$$u'x^2 = -x^2 \quad \Rightarrow \quad u' = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = -1 \quad \Rightarrow \quad du = -dx.$$

Проинтегрируем полученное равенство:

$$\int du = -\int dx \quad \Rightarrow \quad u = -x + c.$$

Общее решение исходного уравнения:

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = x^2 (c - x).$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $e^x(y' + y) = 1$.

Решение.

В исходном уравнении нельзя разделить переменные, и оно не является однородным. Раскрыв скобки нетрудно убедиться что в левой части уравнения при y' и y и в правой части уравнения стояли функции только аргумента *x*: $e^x y' + e^x y = 1$. Значит уравнение является линейным.

Решим уравнение с помощью подстановки Бернулли $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ и $y' = u'v + uv'$:

$$e^x(u'v + uv') + e^x uv = 1.$$

После перегруппировки получим: $e^x u'v + e^x u(v' + v) = 1$.

Решение полученного уравнения равносильно решению системы двух дифференциальных уравнений: $\begin{cases} v' + v = 0 \\ e^x u'v = 1 \end{cases}$.

Решим сначала первое уравнение: $v' + v = 0$.

Оно является уравнением с разделяющимися переменными: $v' + v = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = -v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = -\int dx \Rightarrow \ln|v| = -x + c.$$

Выберем частное решение, полагая $c = 0$: $\ln|v| = -x \Rightarrow v = e^{-x}$.

Теперь найдем общее решение второго уравнения $e^x u'v = 1$.

Подставим в него найденную функцию $v = e^{-x}$:

$$e^x u' e^{-x} = 1 \quad \Rightarrow \quad u' = 1.$$

В этом уравнении также можно разделить переменные:

$$\frac{du}{dx}=1 \;\Rightarrow\; du=dx \;\Rightarrow\; \int du=\int dx \;\Rightarrow\; u=x+c\,.$$

Общее решение исходного уравнения:

$$y(x)=u(x)\cdot v(x)=e^{-x}(x+c)\,.$$

§2. Дифференциальные уравнения высших порядков

1) Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

1. Уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$.

Интегрируя последовательно n раз, получим общее решение уравнения

$$y=\int dx\int dx \ldots \int f(x)dx+C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots+C_n$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''=x+\sin x\,.$$

Решение.

По определению производной n-го порядка: $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'=\dfrac{dy^{(n-1)}}{dx}$.

Значит, вторую производную, стоящую в левой части уравнения можно записать: $y''=(y')'=\dfrac{dy'}{dx}$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{dy'}{dx}=x+\sin x\,.$$

Умножим обе части равенства на dx и проинтегрируем:

$$\frac{dy'}{dx}=x+\sin x \;\Rightarrow\; dy'=(x+\sin x)dx \;\Rightarrow\; \int dy'=\int (x+\sin x)dx \;\Rightarrow$$

$$y'=\int (x+\sin x)dx \;\Rightarrow\; y'=\frac{x^2}{2}-\cos x+c_1.$$

Получили дифференциальное уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{2}-\cos x+c_1 \Rightarrow dy=\left(\dfrac{x^2}{2}-\cos x+c_1\right)dx$.

Вычислив интегралы, получим общее решение исходного уравнения:

$$\int dy = \int\left(\frac{x^2}{2} - \cos x + c_1\right)dx \Rightarrow y = \frac{x^3}{6} - \sin x + c_1 x + c_2 .$$

2. Уравнения вида $F(x, y', y'') = 0$.

Полагаем $y' = p,\ y'' = p'$. Получаем уравнение первого порядка $F(x, p, p') = 0$.

Пример. $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$

Решение.

Полагаем $y' = p,\ y'' = p'$. Уравнение $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$ есть уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными. Интегрируем его:

$$\frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{1 + x^2} \ => \int \frac{dp}{p} = \int \frac{2xdx}{1 + x^2} \ => ln|p| = ln(1 + x^2) + ln|C_1|,$$

$C_1 \neq 0$.

$p = C_1 \cdot (1 + x^2) => y' = C_1 \cdot (1 + x^2) => y = C_1 \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$ – общее решение данного уравнения.

3. Уравнения вида $F(y, y', y'') = 0$.

Полагаем также $y' = p,\ y'' = p \cdot p'$, сводим данное уравнение к уравнению первого порядка $F(y, p, p') = 0$.

2) ***Линейные дифференциальные уравнения высших порядков***

Определение. ***Неоднородным линейным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами*** называется дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = f(x), a_{i-const, i=1,2,3,\ldots,n.} \quad (1)$$

Общее решение такого уравнения определяется следующей **теоремой**:

Общее решение линейного неоднородного уравнения есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения этого неоднородного решения

$$y_{общ.} = \bar{y}_{общ.} + y_{ч.}, \text{ где}$$

$y_{общ.}$ – общее решение уравнения (1)

$\bar{y}_{общ.}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения

$y_{ч.}$ – частное решение неоднородного уравнения (1).

Алгоритм отыскания общего решения неоднородного уравнения:

1. Решить соответствующее однородное уравнение.

Линейное однородное дифференциальное уравнение, соответствующее данному неоднородному уравнению (1), имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = 0 \quad (2)$$

Оно решается с помощью, так называемого ***характеристического уравнения***:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \cdots + a_n = 0, \quad (3)$$

которое получается путём замены производной функции в уравнении (2) соответствующей степенью буквы k.

Уравнение (3) – алгебраическое уравнение степени n, имеет ровно n корней $k_1, k_2, \dots, k_n$. При этом возможны случаи:

– Все корни характеристического уравнения (3) различные, действительные.

– Среди действительных корней характеристического уравнения есть кратные.

– Среди различных корней характеристического уравнения есть комплексные.

В зависимости от этих случаев строится и фундаментальная система частных решений уравнения (2): $y_1, y_2, \dots, y_n$. Общее решение однородного уравнения (2) берётся как линейная комбинация этих частных решений:

$$\bar{y}_{общ.} = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \cdots + C_n \cdot y_n \quad (4),$$

где $C_1, C_{2,\dots,} C_n - const.$

2. Указать какое-либо частное решение неоднородного уравнения.

Отыскание какого-либо частного решения уравнения (1) облегчается, если правая часть этого уравнения имеет, так называемый, «СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВИД»:

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot [P_{m1}(x) \cdot \cos \beta x + P_{m2}(x) \cdot \sin \beta x], \text{ где}$$

$P_{m1}(x)$ - многочлен степени m_1,

$P_{m2}(x)$ - многочлен степени m_2.

В этом случае частное решение линейного неоднородного уравнения (1) ищется в виде: $y_{ч.} = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot [R_m(x) \cdot \cos \beta x + Q_m(x) \cdot \sin \beta x]$, (5)

где $R_m(x)$, $Q_m(x)$ - многочлены степени m = наиб.$\{m_1, m_2\}$ с неизвестными коэффициентами.

r - число, показывающее, сколько раз $\alpha + \beta i$ встречается среди корней характеристического уравнения (3).

При отыскании частного решения в виде (5) используется ***метод неопределённых коэффициентов***, суть которого рассмотрим на конкретных примерах.

Часто при решении задач приходиться выделять из общего решения одно частное решение. Такая задача называется задачей с начальными условиями. Начальные условия для дифференциального уравнения n-го порядка можно записать так:

при $x = x_0, y = y_0, y' = y_0', \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$.

Задачу отыскания частного решения уравнения (1), удовлетворяющего заданным начальным условиям, называют **задачей Коши**.

Пример. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 6x \cdot e^x$

Решение.

$$y_{общ.} = \bar{y}_{общ.} + y_{ч.}$$

1. Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 2y' + y = 0$. Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 2k + 1 = 0 \implies (k-1)^2 = 0 \implies k_1 = k_2 = 1\ ,$$

т.е. корни действительные равные.

Фундаментальная система решений этого уравнения:

$$y_1 = e^x, y_2 = x \cdot e^x.$$

Тогда общее решение однородного урвнения имеет вид:

$$\bar{y}_{общ.} = C_1 e^x + C_2 x \cdot e^x, \text{ где } C_1, C_2 \text{ - постоянные.}$$

2. Найдём какое-либо частное решение данного уравнения.

Правая часть его: $f(x) = 6x \cdot e^x$

$m_1 = 1,\ m_2 = 0, m = 1, \alpha = 1, \beta = 0, \alpha + \beta i = 1, r = 2$

Частное решение отыскиваем в виде (5):

$y_{ч.} = x^2 \cdot e^x \cdot [(Ax + B) \cdot \cos 0x + (Cx + D) \cdot \sin 0x]$ или

$y_{ч.} = e^x \cdot (Ax^3 + Bx^2)$

Найдём производные первого и второго порядков этой функции:

$$\left.\begin{array}{r|l} 1 & y_{ч.} = e^x \cdot (Ax^3 + Bx^2) \\ -2 & y'_{ч.} = e^x \cdot (Ax^3 + Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx) \\ 1 & y''_{ч.} = e^x \cdot (Ax^3 + Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx + 3Ax^2 + 2Bx + 6Ax + 2Bx) \end{array}\right\} (6)$$

(слева от черты проставляются коэффициенты перед y', y'', y из данного уравнения).

Выясняем, какова старшая степень переменной $\boldsymbol{x}$ в этой системе:

$$\left.\begin{array}{r|l} x^3 & A - 2A + A = 0 \\ x^2 & B - 2B - 6A + B + 3A + 3A = 0 \\ x^1 & -4B + 2B + 2B + 6A = 6 \\ x^0 & 2B = 0 \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Система (7) получается так: приравниваем коэффициенты при соответствующих степенях $\boldsymbol{x}$. При этом коэффициенты в левой части умножаем на числа слева от черты в системе (6); правые части берутся из правой части данного дифференциального уравнения.

Решаем систему линейных уравнений (7), которая после преобразований имеет вид $\begin{cases} 6A = 6 \\ 2B = 0 \end{cases} \Longrightarrow A = 1, B = 0$. Подставив эти значения в (6), получим частное решение $y_{ч.} = x^3 \cdot e^x$. Тогда общее решение данного неоднородного уравнения запишем в виде:

$$y_{общ.} = C_1 e^x + C_2 x \cdot e^x + x^3 \cdot e^x.$$

Пример. Решить уравнение $y'' - 7y' + 6y = \sin x$

Решение.

1. Решим соответствующее однородное уравнение $y'' - 7y' + 6y = 0$

Характеристическое уравнение:

$$k^2 - k + 6 = 0 \implies k_1 = 1, \qquad k_2 = 6$$

Фундаментальная систем решений однородного уравнения имеет вид:

$$y_1 = e^x, \qquad y_2 = e^{6x}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид: $\bar{y}_{общ.=}C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{6x}$.

2. Укажем какое-либо частное решение - y_2:

$$f(x) = \sin x$$

$$m_1 = 0,\ m_2 = 0, m = 0, \alpha = 0, \beta = 1, \alpha + \beta i = i, r = 0$$

Частное решение неоднородного уравнения будем отыскивать в виде:

$$y_{ч.} = x^0 \cdot e^{0 \cdot x} \cdot [A \cos x + B \sin x]$$

$$y_{ч.} = [A \cos x + B \sin x]$$

Определим A и B методом неопределённых коэффициентов; суть которого показана при решении примера 1:

$$\begin{array}{r|l} 6 & y_{ч.} = A \cos x + B \sin x \\ -7 & y'_{ч.} = -A \sin x + \cos x \\ 1 & y''_{ч.} = -A \cos x - B \sin x \end{array}$$

Приравниваем коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$:

$$\begin{array}{l|l} \cos x & 6A - 7B - A = 0 \\ \sin x & 7A + 6B - B = 1 \end{array} \Bigg\} \Longrightarrow \begin{cases} 5A - 7B = 0 \\ 7A + 5B = 1 \end{cases} \Bigg\} \Longrightarrow$$

$A = \frac{7}{74}, \;\; B = \frac{5}{74}$

Частное решение $y_{ч.} = \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x$

Тогда общее решение данного уравнения запишется в виде:

$$y_{общ.} = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{6x} + \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = e^{-x}$.

2. Найти решение дифференциального уравнения $y' = \dfrac{y}{x+1}$, удовлетворяющего начальным условиям $y = 6$ при $x = 2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = \dfrac{y}{x} + \ln x$.

4. Найти частное решение дифференциального уравнения $xdy = (x + y)dx$, удовлетворяющего начальным условиям $y = 2$ при $x = -1$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения $xyy' + x^2 - 1 = 0$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + y = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

7. Найти общее решение дифференциального уравнения $(y - x)ydx + x^2dy = 0$.

8. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$, удовлетворяющего начальным условиям $y(1) = 1$.

9. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = \dfrac{x - y}{x + y}$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения $yy' = \frac{1+2x}{y}$.

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(y^2 + x^2)dx - 2xydy = 0.$$

12. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = 3^{x+y}$

Найти общее решение дифференциального уравнения допускающего понижение порядка:

13. $y'' = \frac{1}{x}$

14. $y'' = \frac{1}{(1+x^2)}$

15. $y'' = cos2x$

16. $y'' = 1 - (y')^2$

17. $xy'' + y' = 0$

18. $(y''')^2 + (y'')^2 = 1$

19. $y'' = x + sinx$

20. $y'' = lnx$

21. $y'' = -\frac{1}{2y^3}$

22. $yy'' = (y')^2$

23. $y'' = -\frac{x}{y'}$

24. $(y''')^2 = 4y''$

Определить частное решение уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям:

25. $yy'' + (y')^2 = 1,\ y(0) = y'(0) = 1$

26. $y^2 + (y')^2 - 2yy'' = 0,\ \ y(0) = y'(0) = 1$

27. $y'' = (y')^2 - y,\ \ y(1) = -\frac{1}{4}, y'(1) = \frac{1}{2}$

28. $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0, y(0) = y'(0) = 1$

Решить линейные однородные уравнения:

29. $y'' - 5y' + 6y = 0 \qquad (y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x})$

30. $y'' - 4y' + 4y = 0 \qquad \big(y = e^{2x}(C_1 + C_2x)\big)$

31. $y'' - 4y' = 0 \qquad (y = C_1 + C_2e^{4x})$

32. $y'' + y = 0 \qquad (y = C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

33. $y''' - y' = 0 \qquad (y = C_1 + C_2xe^{-x}C_3e^{x})$

34. $y''' - 4y'' + 3y' = 0 \quad \left(y = C_1 + C_2 x e^{x\sqrt{3}} + C_3 e^{3x}\right)$

35. $y^{IV} - 6y'' + 9y = 0 \quad \left(y = (C_1 + C_2 x)e^{x\sqrt{3}} + (C_3 + C_4 x)e^{-x\sqrt{3}}\right)$

Определить общее решение уравнения:

36. $y'' - y' - 2y = 3xe^x$

37. $y'' - 2y' - 8y = 3x^2 + 2x + 1$

38. $y'' - 2y'2y = x\cos x$

39. $y'' - 3y' - 10y = xe^{-2x}$

40. $y'' - 9y' + 20y = x^3 e^{-2x}$

41. $y'' - 6y' + 15y = 2\sin x + \cos x$

42. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$

43. $y''' + y'' + y' = xe^x$

Тема 3. Ряды

§1. Числовые ряды

Определение. ***Числовым рядом*** называется бесконечная последовательность чисел $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, соединенных знаком сложения:

$$u_1 + u_2 + \ldots u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n ,$$

где $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ - ***члены ряда***, u_n – ***общий член ряда***.

Определение. Сумма первых n членов ряда S_n называется ***n-й частичной суммой ряда***.

Определение. Ряд называется ***сходящимся***, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S .$$

Число S называется ***суммой ряда***, поэтому можно записать

$$S = u_1 + u_2 + \ldots u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \; .$$

Определение. Если конечного предела последовательности частных сумм не существует, то ряд называется ***расходящимся***.

Необходимый признак сходимости. Если ряд сходится, то предел его общего члена u_n при $n \to \infty$ равен нулю

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \; .$$

Достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами

Даны два ряда с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) и $\sum_{m=1}^{\infty} v_n$ (2). Тогда

I-й признак сравнения: если $u_n \le v_n$ при любом n, то

если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1),

если расходится ряд (1), то расходится и ряд (2).

II-й признак сравнения*:* если существует конечный предел отношения их общих членов $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \ne 0$, то ряды одновременно сходятся, либо – расходятся.

***«Эталонные» ряды*:**

а) геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ – сходится при $|q| < 1$, расходится при $|q| \ge 1$;

б) гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится;

в) обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \le 1$.

Признак Даламбера. Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами существует предел отношения $n+1$ члена к n-му члену:

$$\lim_{n\to\infty}\left(u_{n+1}/u_n\right)=l .$$

Тогда, если $l<1$, то ряд сходится; если $l>1$, то ряд расходится; если $l=1$, то вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Признак Коши. Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=p .$$

Тогда, если $p<1$, то ряд сходится, если $p>1$, то ряд расходится, если $p=1$, то вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Интегральный признак сходимости. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, члены которого положительны и не возрастают, т.е. $u_1 \ge u_2 \ge \ldots \ge u_n \ge \ldots$, а функция $f(x)$ определена при $x \ge 1$, непрерывна, не возрастает и $f(1)=u_1,\ f(2)=u_2, \ldots,\ f(n)=u_n, \ldots$. Тогда для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Определение. ***Знакопеременный ряд*** $u_1+u_2+\cdots+u_n+\ldots$ – это ряд, в котором любой член может быть как положительным, так и отрицательным.

Определение. ***Знакочередующийся ряд*** – это ряд, в котором члены попеременно то положительны, то отрицательны:

$$u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots, \text{ где } u_n>0 .$$

Признак Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине $|u_1| > |u_2| > \ldots > |u_n| > \ldots$ и предел его общего члена при $n \to \infty$ равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд сходится.

Теорема. Если ряд, составленный из абсолютных величин членов знакопеременного ряда $|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$ сходится, то исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ***сходится абсолютно***.

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***условно сходящимся***, если абсолютный ряд расходится, а исходный ряд сходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+5}{n^3}$.

Решение.

Используем 2-й признак сравнения. Сравним ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$.

Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{2n^2+5}{n^3}\right)\Big/\dfrac{1}{n}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n(2n^2+5)}{n^3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(2n^2+5)}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{5}{n^2}\right) = 2$,

то данный ряд расходится, так же, как и гармонический.

Пример. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^{2n}}{(2n-1)!}$.

Решение.

Проверим выполнение признака Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{7^{2(n+1)}}{(2(n+1)-1)!} : \frac{7^{2n}}{(2n-1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{7^{2n+2}}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{7^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{49}{2n(2n+1)} = 0 < 1$$

По признаку Даламбера ряд сходится.

Заметим, что $(2n+1)! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot(2n-1)\cdot 2n\cdot(2n+1) = (2n-1)!\cdot 2n\cdot(2n+1)$.

Пример. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$.

Решение.

Заметим, что $\ln x < x$ для любого x, следовательно, и для любого натурального n.

Тогда $\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}} < \frac{n}{\sqrt[3]{n^7}} = \frac{1}{n^{7/3-1}} = \frac{1}{n^{4/3}}$.

Таким образом, члены исходного ряда не превосходят членов сходящегося обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, где $\alpha = 4/3 > 1$.

Следовательно, исходный ряд сходится по первому признаку сравнения.

Пример. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}$.

Решение.

Проверим выполнение признака Коши.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{n} = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{-3n}\right]^{-\frac{1}{3}} =$$

$= e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} < 1$. Так как предел меньше 1, то ряд сходится.

Пример. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$.

Решение.

Проверим интегральный признак.

Положим $f(x) = \frac{1}{(x+3)\ln(x+3)}$, где $x \in [1, +\infty)$.

Очевидно, что при возрастании x оба сомножителя в знаменателе $f(x)$ увеличиваются, поэтому $f(x)$ убывает. Для всех $x \in [1, +\infty)$ $f(x) \geq 0$. Рассмотрим интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{(x+3)\ln(x+3)} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{d\left(\ln(x+3)\right)}{\ln(x+3)} = \lim_{b\to+\infty}\ln\left(\ln(x+3)\right)\Big|_1^b =$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\ln(\ln(b+3)) - \ln(\ln 4)\right] = +\infty.$$

Итак, интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, следовательно, в силу интегрального признака, исходный ряд расходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \ldots$.

Решение.

Применим признак Лейбница:

1) члены ряда по абсолютной величине убывают:

$$1 > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^2} > \ldots > \frac{1}{n^2}\ldots$$

2) предел общего члена $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$.

Следовательно, ряд сходится.

Пример. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2\sqrt{n}-1}{n\sqrt{n}+3}$. В случае сходимости ряда установить ее характер (абсолютная или условная).

Решение.

Применим признак Лейбница:

$$|u_{n+1}| < |u_n| \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}|u_n| = 0.$$

Вычислим члены ряда по абсолютной величине

$$|u_1|=\frac{1}{4}=0{,}25,\quad |u_2|=\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+3}\approx 0{,}313,\quad |u_3|=\frac{2\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}+3}\approx 0{,}3,$$

$$|u_4|=\frac{2\sqrt{4}-1}{4\sqrt{4}+3}=\frac{3}{11}\approx 0{,}27,\ldots$$

Члены ряда убывают, начиная с третьего. Вычислим предел общего члена, применив правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{u'(x)}{v'(x)}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}-1}{n\sqrt{n}+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1/\sqrt{n}}{\frac{3}{2}\sqrt{n}}=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Таким образом, ряд сходится по признаку Лейбница.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{n}-1}{n\sqrt{n}+3}$, составленный из абсолютных величин данного ряда, расходится, так как его можно сравнить с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, применив предельный признак сравнения: если выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}\neq 0$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ ведут себя одинаково, то есть одновременно сходятся либо одновременно расходятся.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}-1}{n\sqrt{n}+3}:\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\sqrt{n}-n}{n\sqrt{n}+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2-1/\sqrt{n}}{1+3/(n\sqrt{n})}=2\neq 0.$$

Пример. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{8^n}$.

Решение.

Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{8^n}$.

Применим признак Даламбера: $u_n=\frac{n^2}{8^n}$, $u_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{8^{n+1}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{8^{n+1}}\cdot\frac{8^n}{n^2}=\frac{1}{8}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2}=\frac{1}{8}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2}=\frac{1}{8}<1,$$ т.е.

ряд, составленный из модулей членов исходного ряда, сходится.

Следовательно, знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{8^n}$ сходится абсолютно.

Пример. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. В случае сходимости ряда установить ее характер (абсолютная или условная).

Решение.

Проверим признак Лейбница. Рассмотрим первые несколько членов ряда по абсолютной величине

$$a_1\approx 0{,}69,\ a_2=2\ln 1{,}25\approx 0{,}45,\ a_3=3\ln 10/9\approx 0{,}32,\ a_4=4\ln 17/16\approx 0{,}24,\ldots$$

Очевидно, члены ряда убывают с ростом номера n. Вычислим предел общего члена:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=[0\cdot\infty]=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+1/n^2\right)}{1/n}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+1/n^2}\cdot\left(-\frac{2}{n^3}\right)}{-1/n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2n}=0.$$

Ряд сходится по признаку Лейбница.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость, то есть исследуем на сходимость знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

Заметим, что этот ряд можно сравнить с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Применяя предельный признак сравнения, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\left(1+1/n^2\right)}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+1/n^2\right)}{1/n^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+1/n^2}\cdot\left(-2/n^3\right)}{-2/n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n^2}=1\neq 0$$

Предел равен конечному числу, не равному нулю, следовательно, данный ряд так же как и гармонический ряд расходится.

Таким образом, знакочередующийся ряд сходится условно.

§2. Степенные ряды

Определение. ***Функциональными*** называются ряды, членами которых являются функции: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots$.

Определение. Значения *x*, при которых функциональный ряд сходится, называются его ***точками сходимости***. Значения *x*, при которых функциональный ряд расходится – ***точками расходимости***.

Определение. Множество всех точек сходимости функционального ряда – ***область сходимости*** этого ряда.

Степенные ряды:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ – *ряд по степеням x;*

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots$ – *ряд по степеням* $(x - x_0)$.

Здесь x_0 и a_n – постоянные (const), x – переменная.

Интервал сходимости и радиус сходимости степенного ряда

Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ существует число $R \geq 0$, такое что:

– ряд сходится абсолютно внутри интервала $(-R; R)$;

– ряд расходится вне этого интервала;

– сходимость ряда в точках $x = -R$ и $x = R$ нужно исследовать дополнительно.

Определение. Интервал $(-R; R)$ называется ***интервалом сходимости степенного ряда***; число R – ***радиус сходимости ряда***.

Для нахождения интервала и радиуса сходимости степенного ряда используют признак Даламбера (или признак Коши):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad \text{или} \qquad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}.$$

Разложение функций в степенные ряды (ряды Тейлора, Маклорена):

Пусть $f(x)$– бесконечно дифференцируемая функция в интервале $|x - x_0| < R$. Тогда она может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней степенной **ряд Тейлора**:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

При $x_0 = 0$ ряд называется **рядом Маклорена**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

Стандартные разложения:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \quad x \in (-1, +1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \ldots, \quad x \in (-1, +1];$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots, \quad x \in [-1,+1];$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 3} x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5} x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} x^7 + \ldots, \quad x \in (-1,+1).$$

§3. Приложения степенных рядов

С помощью разложения функции $f(x)$ в степенной ряд можно вычислить значение этой функции в заданной точке с необходимой точностью. Если $f(x)$ – подынтегральная функция, то представляя ее в виде степенного ряда можно вычислить определенный интеграл с заданной точностью.

Пример. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n n!}{n+3}$.

Решение. Применим признак Даламбера. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1}(n+1)!}{n+4} : \frac{(x+2)^n n!}{n+3} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)(n+1)(n+3)}{n+4} \right| = |x+2| \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+3}{n+4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= |x+2| \lim_{n\to\infty} \frac{1+4/n+3/n^2}{1/n+4/n^2} = |x+2| \cdot \infty = \infty.$$

Так как предел больше единицы для любого *x*, то по признаку Даламбера ряд расходится на всей числовой оси, кроме точки $x = -2$, в которой ряд сходится.

Пример. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{n^3 + \sqrt{n}}$.

Решение.

Применим признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)^3 + \sqrt{n+1}} : \frac{(-1)^n 2^n x^n}{n^3 + \sqrt{n}} \right| = 2|x| \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + \sqrt{n}}{(n+1)^3 + \sqrt{n+1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= 2|x| \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{n}/n^3}{(1+1/n)^3 + \sqrt{1/n^5 + 1/n^6}} = 2|x| \cdot 1 = 2|x|.$$

Решаем неравенство $2|x|<1$. Имеем равносильное неравенство $-1/2<x<1/2$. Отсюда интервал сходимости $(-0{,}5,\ 0{,}5)$.

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.
При $x=-0{,}5$ получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n(-0{,}5)^n}{n^3+\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^3+\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+\sqrt{n}},$$

который можно сравнить со сходящимся обобщенным гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, т.к. $\alpha=3>1$.

Действительно, используя предельный признак сравнения, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3+\sqrt{n}}:\frac{1}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3+\sqrt{n}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n}/n^3}=1,$$

то есть $x=-0{,}5$ точка сходимости.

При $x=0{,}5$ получаем знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n 0{,}5^n}{n^3+\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+\sqrt{n}},$$

который сходится абсолютно, так как сходится ряд из модулей его членов.
Следовательно, область сходимости данного ряда - $[-0{,}5,\ 0{,}5]$.

Пример. Используя разложение функции $y=(1+x)^m$ в биномиальный ряд, вычислить $\sqrt[3]{129}$ с точностью до 0,001.

Решение.

Представим $\sqrt[3]{129}$ в виде

$$\sqrt[3]{129}=\sqrt[3]{125+4}=(125+4)^{1/3}=5\left(1+\frac{4}{125}\right)^{1/3}.$$

Так как $x=4/125$ входит в область сходимости биномиального ряда $(-1;1)$, то при $x=4/125$ и $m=1/3$, учитывая разложение

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+...+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n+...$$

получим

$$\sqrt[3]{129}=5(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{125}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{4}{125}\right)^2+...+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)...\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}\left(\frac{4}{125}\right)^n+...=$$

$$=5+0{,}0533-0{,}00057+...\approx 5{,}053.$$

Для обеспечения данной точности расчета необходимо взять 2 члена, так как по следствию из признака Лейбница для сходящегося знакочередующегося ряда погрешность меньше первого из отброшенных членов $|r_2|\le 0{,}00057<0{,}001.$

Пример. Используя разложение функции в ряд Маклорена вычислить $\cos 10^0$ с точностью до 0,0001.

Решение.

Для вычисления $\cos 10^0=\cos\frac{\pi}{18}$ сначала запишем ряд для косинуса x

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+...,$$

а затем при $x=\pi/18$, принадлежащем области сходимости $(-\infty;+\infty)$

$$\cos\frac{\pi}{18}=1-\frac{\left(\pi/18\right)^2}{2!}+\frac{\left(\pi/18\right)^4}{4!}-...+\frac{(-1)^n\left(\pi/18\right)^{2n}}{(2n)!}+...=1-0{,}01523+0{,}00004-....$$

Необходимо взять два члена, так как при этом погрешность $|r_2|<0{,}00004<0{,}0001$. Итак, $\cos 10^0=1-0{,}01523\approx 0{,}9848$.

Пример. Используя разложение подынтегральной функции в ряд Маклорена, вычислить с точностью до 0,001 значение определенного интеграла:

$$\int_0^{0,4} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}\,dx .$$

Решение.

«Точное» интегрирование здесь невозможно, так как интеграл «неберущийся». Воспользуемся разложением в ряд Маклорена функции $y=\ln(1+x)$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+\ldots$$

Заменяя x на $x/2$ в разложении получим

$$\ln\left(1+x/2\right)=x/2-\frac{\left(x/2\right)^2}{2}+\frac{\left(x/2\right)^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^n\left(x/2\right)^{n+1}}{n+1}+\ldots$$

Разделив полученный ряд на x,

$$\frac{\ln\left(1+x/2\right)}{x}=\frac{1}{2}-\frac{x}{8}+\frac{x^2}{24}-\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}(n+1)}+\ldots$$

и почленно интегрируя в интервале $(0;\,0{,}4)$, принадлежащем интервалу сходимости ряда $(-1;\,1]$, получим

$$\int_0^{0,4}\frac{\ln\left(1+x/2\right)}{x}dx=\int_0^{0,4}\frac{1}{2}dx-\int_0^{0,4}\frac{x}{8}dx+\int_0^{0,4}\frac{x^2}{24}dx+\ldots+\int_0^{0,4}\frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}(n+1)}dx+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}x\Big|_0^{0,4}-\frac{1}{8}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,4}+\frac{1}{24}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{0,4}+\ldots\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^{0,4}+\ldots=0{,}2-0{,}01+0{,}0009-\ldots\approx 0{,}19.$$

Оценка погрешности вычисления производится так же, как в разобранных выше примерах.

Пример. Используя разложение подынтегральной функции в ряд Маклорена, вычислить с точностью до 0,001 значение определенного интеграла:

$$\int_0^{0,9} \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}.$$

Решение.

Интеграл является «неберущимся». Представим подынтегральную функцию в виде

$$\left(8+x^3\right)^{-1/3} = \frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^3\right)^{-1/3} = 0,5\left(1+\left(0,5x\right)^3\right)^{-1/3},$$

а затем воспользуемся разложением в ряд Маклорена функции $y=(1+x)^m$, где x заменим на $\left(0,5x\right)^3$, $m=-1/3$.

$$0,5\left(1+\left(0,5x\right)^3\right)^{-1/3} = 0,5\left(1-\frac{1}{3}\cdot(0,5x)^3 + \frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(0,5x\right)^6 \quad ...+\right.$$

$$\left. + \frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right) \qquad -\frac{1}{3}-n+1\Big)}{}\left(0,5x\right)^{3n} + ...\right)$$

Интегрируя почленно полученный ряд в интервале $(0;\,0,9)$, принадлежащем интервалу сходимости ряда $(-1;1)$, получим

$$\int_0^{0,9}\frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}} = \int_0^{0,9}0,5dx - \int_0^{0,9}\frac{0,5^4}{3}x^3dx + \int_0^{0,9}\frac{2\cdot 0,5^7}{9}x^6dx + ... = 0,5x\Big|_0^{0,9} - \frac{0,5^4}{3}\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^{0,9} +$$

$$+\frac{2\cdot 0,5^7}{9}\frac{x^7}{7}\Bigg|_0^{0,9} + ... = 0,45 - 0,0034 + 0,00011 - ... \approx 0,447$$

Задания для самостоятельного решения

Исследовать сходимость рядов с положительными членами:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-3}{5n^2+2}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+n}{4+n^2-5n}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-3}{5n^2+2}\right)^n$

Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n^2+2\sqrt{n}+1}{n^3}\right)$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n!}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5n+2}{n-3}$

Найти области сходимости степенных рядов и исследовать поведение рядов на концах интервала сходимости:

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2^n\sqrt{n+3}}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+1)x^{2n}}{2^n}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt{n+7}}$

11. Используя разложение подынтегральной функции в ряд вычислить $\int\limits_0^{0,2}\frac{1-e^{-x}}{x}dx$ с точностью до 0,001.

12. Используя разложение функции $y=(1+x)^m$ в биномиальный ряд, вычислить $\frac{1}{\sqrt{102}}$ с точностью до 0,0001.

13. Используя разложение подынтегральной функции в ряд вычислить $\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+2x)}{x}dx$ с точностью до 0,001.

Список литературы

1. Александрова Е.В. Математика. (Курс лекций и набор практических заданий для студентов бакалавров направлений подготовки 110800, 270800): учебное пособие / Е.В. Александрова, М.Н. Уварова. – Орел: ОрелГАУ, 2013. – 745 с.

2. Балдин К.В. Краткий курс высшей математики: учебник / К.В. Балдин. – 5-е изд. – Москва: Дашков и К, 2021. – 510 с.

3. Высшая математика для экономического бакалавриата в 3 ч. Часть 3 : учебник и практикум для вузов / Н.Ш. Кремер, М.Н. Фридман, Б.А. Путко, И.М. Тришин ; под редакцией Н.Ш. Кремера. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2026. – 419 с.

4. Гоголева И.В., Семенова Г.Е. Математика: математический анализ. учебно-методическое пособие / Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова. Якутск, 2015. – Т. Часть 1. – 136 с.

5. Гриднева И.В., Федулова Л.И., Шацкий В.П. Математика. Учебное пособие для студентов очной формы обучения экономического факультета по специальности 38.05.01. – «Экономическая безопасность» / ФГБОУ ВО Воронежский ГАУ. Воронеж, 2018. –236 с.

6. Ильина М.А. Практикум по математическому анализу: учебно-методическое пособие / М.А. Ильина, Н.Т. Копылова, М.Л. Поддубная, Е.Г. Свердлова. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2012. – 153 с.

7. Кремер Н.Ш. Математический анализ: учебник и практикум для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин ; ответственный редактор Н.Ш. Кремер. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2026. – 593 с.

Оглавление

Издательство Алтайского филиала РАНХиГС
Адрес издательства: 656008, Алтайский край,
г. Барнаул, ул. Партизанская, 187,
nauka-alt@ranepa.ru, тел. (3852) 504-083
Изготовитель: ООО Алтай-Циклон,
Адрес изготовителя: г. Барнаул, ул. Кирова, 49А
1 CD-R; 2,00 Мб
Дата подписания к использованию: 30.05.2026
Тираж – 10 экз.